## 7 КЛАСС

**Задача 7.1.** У Бори в три раза больше братьев, чем сестёр. а у его сестры Вали сестёр в семь раз меньше, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

*Ответ*: *7 мальчиков и 2 девочки.*

Пусть в семье $x$ сестёр, тогда у Бори $3x$ братьев. У сестры Вали $(x - 1)$ сестёр, а братьев (вместе с Борей) $3x + 1$. По условию $7 \cdot (x - 1) = 3x + 1$, то есть $x = 2$. Отсюда число братьев $3x + 1 = 7$.

**Задача 7.2.** Паниковскому приснилось, что он получил 1 000 000 рублей на блюдечке с голубой каемочкой. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир и делал так, пока хватало хотя бы на одну бутылку. При этом он заметил, что между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Паниковский во сне?

*Ответ*: 166 666.

Надо проводить расчет в (пустых) бутылках, в этой «валюте» цена кефира не меняется. «Кефир нетто» стоит 6 бутылок, так что полученных денег хватит на 1 000 000 : 6 = 166 666 бутылок кефира и еще 4 пустых бутылки останется.

**Задача 7.3**. Квадрат $9 \times 9$ клеточек разрезали по клеточкам на 14 прямоугольников. При этом длины обеих сторон каждого прямоугольника оказались больше 1. Могло ли случиться так, что среди этих прямоугольников не было ни одного квадрата?

*Ответ*: *нет.*

Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть $a$ и $b$ — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целые числа $a$ и $b$ больше 1, то $b \geq 2$, и значит, $a \geq 3$. Следовательно, площадь каждого прямоугольника $ab$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 14 прямоугольников должны занимать не менее $14 \cdot 6 = 84$ клеток, в то же время исходный квадрат $9 \times 9$ имеет всего 81 клетку. Из этого противоречия следует, что среди прямоугольников есть хотя бы один квадрат.

**Задача 7.4.** Квадрат, нарисованный на клетчатой бумаге, удалось разрезать на трехклеточные уголки . Каков наименьший возможный размер этого квадрата?

*Ответ*: *сторона квадрата равна* 6.

Поскольку площадь уголка равна 3, то площадь квадрата делится на 3. Тогда его сторона тоже делится на 3.

Наименьший из таких квадратов имеет сторону 3. Но его нельзя разрезать на трехклеточные уголки, поскольку возможно единственное размещение уголков вдоль стороны квадрата (рис. 1,*а*), после которого остается поле $1 \times 3$, к котором размещение уголка невозможно.

Следующий квадрат по величине квадрат со стороной 6. Пример разрезания показан на рис. 1,*б*.

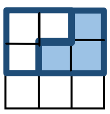


*Рис.* 1,*а*

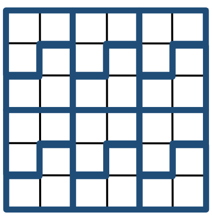


*Рис.* 1,*б*

**Задача 7.5.** Разрежьте произвольный треугольник на 3 части и сложите из них прямоугольник.

*Ответ*: *пример разрезания показан на рис*. 2.

В квадрате $ABCD$ точки $M$ и $N$ — середины сторон $AD$ и $BC$ соответственно (рис. 2.). На стороне $AB$ выберем произвольную точку $P$. Прямые $PM$ и $PN$ пересекут прямую $CD$ в точках $K$ и $T$ соответственно. Прямоугольные треугольники $APM$ и $DKM$ равны по катету и острому углу: $AM = MD$, $\angle AMP = \angle DMK$ — как вертикальные. Аналогично доказываем равенство треугольников $BNP$ и $CNT$.

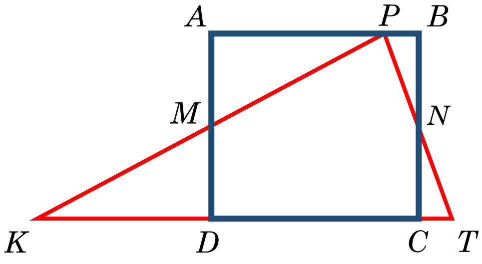


*Рис*. 2

Таким образом, отрезав от квадрата $ABCD$ треугольники $APM$ и $BNP$, и, поставив их на место треугольников $DKM$ и $CNT$, получим треугольник $PTK$.

**Задача 8.1**. Вычислите дробь, в которой 2014 двоек:

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\ddots_{2-\cfrac{1}{2}}}}.$$

*Ответ*: $\frac{2014}{2015}$.

Дробь с одной двойкой равна $\frac{1}{2}$, дробь с двумя двойками равна $\frac{2}{3}$, с тремя двойками — $\frac{3}{4}$, и, вообще, если на предыдущем шаге получилась дробь $\frac{n}{n+1}$, то на следующем шаге будет дробь

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}$$

(индукция). Значит, если в выражении содержится $n$ двоек, то оно равно $\frac{n}{n+1}$.

**Задача 8.2**. Квадрат $9 \times 9$ клеточек разрезали по клеточкам на 14 прямоугольников. При этом длины обеих сторон каждого прямоугольника оказались больше 1. Могло ли случиться так, что среди этих прямоугольников не было ни одного квадрата?

*Ответ*: *нет*.

Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть $a$ и $b$ — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целые числа $a$ и $b$ больше 1, то $b \geq 2$, и значит, $a \geq 3$. Следовательно, площадь каждого прямоугольника $ab$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 14 прямоугольников должны занимать не менее $14 \cdot 6 = 84$ клеток, в то же время исходный квадрат $9 \times 9$ имеет всего 81 клетку. Из этого противоречия следует, что среди прямоугольников есть хотя бы один квадрат.

**Задача 8.3**. Известно, что для некоторого натурального $n$ числа $n - 1$ и $n + 1$ оба являются простыми числами. Докажите, что числа от 1 до $n$ можно выстроить в строку так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих чисел являлась простым числом.

*Доказательство*. Число $n$ чётное, иначе оба числа $n - 1$ и $n + 1$ были бы чётными, тогда хотя бы одно из них не было простым. Таким образом, $n = 2k$. Рассмотрим следующую расстановку чисел от 1 до $n$:

$$2k,\ 1,\ 2k-2,\ 3,\ 2k-4,\ 5,\ \ldots,\ 2,\ 2k-1.$$

Все суммы рядом стоящих чисел в составленной последовательности равны $n - 1$ или $n + 1$, то есть будут простыми числами.

**Задача 8.4**. На сторонах $AB$ и $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = AC$) соответственно взяты точки $M$ и $N$ такие, что $AN > AM$. Прямые $MN$ и $BC$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что $MK > MB$.

*Доказательство*. (Рис. 1.) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ACB > \angle NKC$. По свойству равнобедренного треугольника $\angle ACB = \angle ABC$, и значит, $\angle ABC > \angle NKC$. По теореме о соотношениях сторон и углов в треугольнике $MBK$ получаем из $\angle MBK > \angle MKB$ соотношение $MK > MB$.

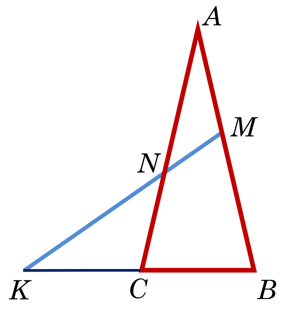



*Рис*. 1

**Задача 8.5.** Дано 100 целых чисел. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего числа, и так далее, наконец, из 100-го числа вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности равняться 1, 2, … , 100 соответственно?

*Ответ*: *не могут*.

Пусть $a_1$, $a_2$, … , $a_{100}$ — исходные числа. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа $n$. По признаку делимости на 3 числа $n$ и $S(n)$ имеют равные остатки при делении на 3, и значит, разность $n - S(n)$ кратна 3. По условию задачи разности $b_1 = a_1 - S(a_2)$, $b_2 = a_2 - S(a_3)$, … , $b_{99} = a_{99} - S(a_{100})$, $b_{100} = a_{100} - S(a_1)$ равны числам 1, 2, … , 100 соответственно. Тогда их сумма

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{99} + b_{100} = (a_1 - S(a_1)) + (a_2 - S(a_2)) + \ldots + (a_{100} - S(a_{100}))$$

кратна 3. С другой стороны, эта сумма равна $1 + 2 + \ldots + 100 = 101 \cdot 50$ и на 3 не делится. Противоречие.

**Задача 9.1.** Набор чисел называется *хорошим,* если при удалении любого числа из этого набора оставшиеся числа можно разбить на две группы с равными суммами. Будет ли хорошим набор нечётных чисел 1, 3, 5, … , 2015?

*Ответ*: *нет.*

В данном наборе 1008 нечётных чисел. Сумма двух нечётных чисел является чётным числом, поэтому сумма всех чисел набора чётная. При удалении любого нечётного числа сумма оставшихся чисел будет нечётной, и значит, оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равными суммами.

**Задача 9.2.** Девять чисел таковы, что сумма любых четырех из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

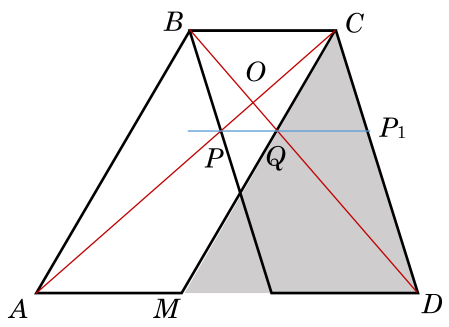
*Доказательство.* Упорядочим исходные числа по неубыванию и докажем, что наименьшее среди них — первое число — больше 0. Выберем среди данных чисел четыре самых больших числа $A$, $B$, $C$, $D$. В оставшуюся пятёрку входит первое число. Если бы оно было неположительным, то сумма этих пяти чисел не превосходила бы суммы остальных четырёх чисел, входящих в эту пятёрку. Но сумма любых четырёх чисел не больше $A + B + C + D$, и значит, сумма чисел этой пятёрки не больше $A + B + C + D$. Противоречие.

**Задача 9.3.** Можно ли найти такие числа $p$ и $q$, что выражение $x^2 + px + q$ при любом целом $x$ принимает целое значение, делящееся на 3?

*Ответ*: *нет.*

Предположим, что такие числа $p$ и $q$ есть. Подставив в выражение $x^2 + px + q$ значения $x = 0$, $x = -1$ и $x = 1$, соответственно, получим значения выражения $q$, $1 + p + q$ и $1 - p + q$, которые делятся по нашему предположению на 3. Тогда по свойствам делимости $(1 + p + q) + (1 - p + q) - 2q = 2$ тоже делится на 3. Пришли к противоречию. Значит, таких чисел $p$ и $q$ нет.

**Задача 9.4.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ через точку $B$ проведена прямая, параллельная стороне $CD$ и пересекающая диагональ $AC$ в точке $P$, а через точку $C$ — прямая, параллельная стороне $AB$ и пересекающая диагональ $BD$ в точке $Q$. Докажите, что прямая $PQ$ параллельна основаниям трапеции.




*Доказательство.* Треугольники $BOC$ и $AOD$ подобны, поэтому $OC : OA = OB : OD = k$. В силу подобия треугольников $OCQ$ и $OBA$ имеем также $CQ : AB = OC : OB = k$. Аналогично и $BP : CD = k$. Из этого и следует требуемая параллельность. Например, для доказательства можно отложить расстояние $CP_1 = CP$. Тогда треугольник $QCP_1$ подобен треугольнику $MCD$.

**Задача 9.5.** По кругу в некотором порядке по одному разу записаны числа от 1 до 2014. Для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих разностей?

*Ответ*: 4026.

Найдем на окружности число 1 и обозначим его $a_1 = 1$. Следующие за ним по часовой стрелке числа обозначим через $a_2$, $a_3$, … , $a_k = 2014$, $a_{k+1}$, … , $a_{2014}$. Тогда сумма модулей разностей соседних чисел равна

$$S = |1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{k-1} - 2014| +$$
$$+ |2014 - a_{k+1}| + |a_{k+1} - a_{k+2}| + \ldots + |a_{2014} - 1|.$$

Для оценки этой суммы воспользуемся хорошо известным неравенством для суммы модулей двух чисел: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Применим это неравенство отдельно к сумме первых $k$ слагаемых и к сумме остальных слагаемых:

$$S \geq |1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{k-1} - 2014| +$$

$$+\ |2014 - a_{k+1} + a_{k+1} - a_{k+2} + \ldots + a_n - 1| = |1 - 2014| + |2014 - 1| = 4026.$$

Это значение суммы достигается, например, если все числа от 1 до 2014 расставлены по кругу в возрастающем порядке.

**Задача 10.1.** Набор чисел называется *хорошим,* если при удалении любого числа из этого набора оставшиеся числа можно разбить на две группы с равными суммами. Будет ли хорошим набор нечётных чисел 1, 3, 5, … , 2015?

*Ответ*: *нет.*

В данном наборе 1008 нечётных чисел. Сумма двух нечётных чисел является чётным числом, поэтому сумма всех чисел набора чётная. При удалении любого нечётного числа сумма оставшихся чисел будет нечётной, и значит, оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равными суммами.

**Задача 10.2.** Банк «Империал» при снятии денег со счета берёт комиссию, состоящую из фиксированной платы за проведение операции и еще платы, пропорциональной взятой сумме. Например, при снятии со счета 5 тысяч рублей вкладчик заплатит 49 рублей 50 копеек, при снятии 8 тысяч — 72 рубля 90 копеек. Какую комиссию заплатит вкладчик, если он захочет снять со счета 9500 рублей?

*Ответ*: 84 *руб.* 60 *коп.*

Пусть $x$ — доля, пропорциональная взятой сумме из банка, $y$ — фиксированная плата за проведение операции. Тогда составим систему уравнений: $5000x + y = 49{,}5$ и $8000x + y = 72{,}9$. Получим $1000x = 7{,}8$ и $y = 10{,}5$, тогда $9500x + y = 9{,}5 \cdot 7{,}8 + 10{,}5 = 84{,}6$ руб.

**Задача 10.3.** Дан остроугольный треугольник $ABC$, $CK$ и $BM$ — высоты треугольника. Радиус описанной окружности треугольника $KMB$ равен $2\sqrt{6}$, $AM = 1$, $AK = 2$. Найдите $\cos\angle BAC$.

*Ответ*: $\cos\angle BAC = \frac{5}{24}$.

Прямоугольные треугольники $BKC$ и $BMC$ имеют общую гипотенузу $BC$, поэтому точки $B$, $K$, $M$ и $C$ принадлежат одной окружности, т.е. радиус описанной окружности треугольника $KMB$ равен половине $BC$. Отсюда $BC = 4\sqrt{6}$.

Как углы опирающие на дополнительные дуги окружности $\angle BKM + \angle MCB = 180°$, но $\angle BKM + \angle AKM = 180°$ как смежные, получаем $\angle AKM = \angle MCB$. Отсюда треугольники $ABC$ и $AMK$ подобны по двум углам ($\angle AKM = \angle MCB$ и угол при вершине $A$ — общий). Из подобия треугольников следует, что $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AK} = \frac{1}{2}$, т.е. $AC = 2AB = 2x$ (здесь $AB = x$).

Для прямоугольных треугольников $ACK$ и $BCK$ с общим катетом $KC$ составим уравнение $AC^2 - AK^2 = BC^2 - BK^2$ или $(2x)^2 - 2^2 = (4\sqrt{6})^2 - (2 - x)^2$, решение которого $x = \frac{24}{5}$. Из прямоугольного треугольника $ABM$ получим, что $\cos\angle BAC = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{x} = \frac{5}{24}$.

**Задача 10.4.** Можно ли найти такие числа $p$ и $q$, что при $x$, принимающем три каких-нибудь последовательных натуральных значениях, величина $x^2 + px + q$ окажется целой и кратной трем?

*Ответ*: *нет.*

Предположим, что такие числа $p$ и $q$ есть, и выражение $P(x) = x^2 + px + q$ принимает целые и кратные трем значения при последовательных натуральных значениях $x$. То есть при $x = n - 1$, $x = n$, $x = n + 1$, соответственно, получим значения выражения $P(n - 1) = (n - 1)^2 + p(n - 1) + q$, $P(n) = n^2 + pn + q$ и $P(n + 1) = (n + 1)^2 + p(n + 1) + q$ кратные 3. Тогда по свойствам делимости $P(n - 1) + P(n + 1) - 2P(n) = 2$ тоже делится на 3. Пришли к противоречию. Значит, таких чисел $p$ и $q$ нет.

**Задача 10.5.** Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет неравенствам $P(-n) < P(n) < n$ для некоторого целого $n$. Докажите, что $P(-n) < -n$.

*Доказательство.* Для многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами справедливо утверждение: *для любых различных целых чисел $a$ и $b$ разность $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.* Это следует из равенства

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).$$

Тогда разность $P(n) - P(-n)$ делится на $n - (-n) = 2n$. По условию $P(n) > P(-n)$, поэтому эта разность не меньше $2n$, то есть $P(n) - P(-n) \geq 2n$. Отсюда

$$P(-n) \leq P(n) - 2n < n - 2n,$$

и значит, $P(-n) < -n$.

**Задача 11.1.** Набор чисел называется *хорошим,* если при удалении любого числа из этого набора оставшиеся числа можно разбить на две группы с равными суммами. Будет ли хорошим набор нечётных чисел 1, 3, 5, … , 2015?

*Ответ*: *нет.*

В данном наборе 1008 нечётных чисел. Сумма двух нечётных чисел является чётным числом, поэтому сумма всех чисел набора чётная. При удалении любого нечётного числа сумма оставшихся чисел будет нечётной, и значит, оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равными суммами.

**Задача 11.2.** Целое число $m > 1$ называется *универсальным делителем*, если существует квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, принимающий целые кратные $m$ значения при всех целых значениях $x$. Найдите все универсальные делители.

*Ответ*: $m = 2$.

Пусть $m$ — универсальный делитель, $P(x) = x^2 + px + q$ — соответствующий трехчлен. Тогда число $P(-1) + P(1) - 2P(0) = (1 + p + q) + (1 - p + q) - 2q = 2$ делится на $m$. Поскольку $m > 1$, то $m = 2$. Число 2 действительно является универсальным делителем, для этого достаточно рассмотреть трехчлен $x(x + 1)$.

**Задача 11.3.** Каждое из неотрицательных чисел $x$, $y$ и $z$ не больше 1. Докажите:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-z)^2}+\sqrt{z^2+(1-x)^2}\le 3.$$

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что при неотрицательных $a$ и $b$ выполняется неравенство $\sqrt{a^2+b^2}\le a+b$. В этом легко убедиться, возведя в квадрат обе части этого неравенства. Применяя его к каждому слагаемому левой части, получим:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}\le x+(1-y),\qquad \sqrt{y^2+(1-z)^2}\le y+(1-z),\qquad \sqrt{z^2+(1-x)^2}\le z+(1-x).$$

Сложим эти неравенства и получим требуемое неравенство.

**Задача 11.4.** 10 школьников по окончании 10 класса решили поступать либо на мехмат, либо на физфак. Некоторые школьники дружат между собой. Каждый понедельник они созваниваются с друзьями и обсуждают планы. Если большинство друзей некоторого школьника хотят поступать не туда, куда он, к следующему понедельнику он принимает мнение этого большинства. Докажите, что до окончания школы их мнения устоятся и не будут больше меняться.

*Доказательство.* Всего в этой группе 45 пар школьников, из них $n$ пар друзей, которые собираются поступать в разные места. Пусть Петя собирается на физфак, $k$ его друзей — на мехмат, а $l$ — на физфак, причем $l < k$. После того, как он переменит мнение, число $n$ уменьшится на $k$ и увеличится на $l$. Таким образом, после каждой перемены мнений число $n$ уменьшится на $k - l > 0$ пар. Ясно, что это может происходить не более 45 раз. Значит, за год (52 недели) процесс перемены мнений завершится.

**Задача 11.5.** Правильная четырёхугольная призма со стороной основания $a$ и высотой $h$ проектируется на плоскость, проходящую через сторону основания и составляющую угол $x$ с плоскостью боковой грани, содержащей эту сторону. При каком значении $x$ площадь проекции будет максимальной? Чему равно это максимальное значение?

*Ответ*: $a\sqrt{a^2+h^2}$.

Проекция призмы оказывается составленной их двух частей: проекции боковой грани $S_1 = a\cdot h\cdot\cos x$ и проекции одного из оснований $S_2 = a^2\cos(\pi/2 - x) = a^2\sin x$; проекции остальных частей призмы попадают в ту же фигуру. Тогда $S = S_1 + S_2 = a(h\cos x + a\sin x)$ $= a\sqrt{a^2+h^2}\cos(x - x_0)$ достигает максимума при $x = x_0$, где $x_0 = \arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$. Этот максимум, очевидно, равен $a\sqrt{a^2+h^2}$.